CHAPTER 7

MATLAB 程式設計進階篇

多項式的處理與分析

本章重點

本章介紹 MATLAB 處理多項式的相關指令，以便用於多項式的計算與分析，包括：多項式的加、減、乘、除、求值、求根、微分、積分、矩陣的特徵多項式、部份分式展開、多項式擬合等。

7-1 多項式的加減乘除

一個 n 次的多項式可以表示成

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

因此在 MATLAB 中，可以用一個長度為 n+1 的列向量來表示多項式 $p(x)$ 如下：

$$p = [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0]$$

舉例來說，我們可用 p = [1, 2, 3, 1] 來表示一個三次多項式 $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$。

多項式的加減，可直接由向量的加減而推出。若有兩多項式分別是 $p_1(x) = x^3 + x + 1$ 及 $p_2(x) = x^2 - x + 2$，則其和與差可計算如下：

Example 1: 07-多項式的處理與分析/polyPlus.m

```
p1 = [1,0,1,1];
p2 = [0,1,-1,2];
p1 + p2
p1 - p2
```

```
ans =
     1     1     0     3
ans =
     1    -1     2    -1
```

必須注意的是：矩陣 p1 與 p2 的長度要一致，否則 MATLAB 就會產生運算錯誤的訊息。

多項式的乘與除，可使用 conv 及 deconv 指令來達成，例如，欲求多項式 $p_1(x)$ 與 $p_2(x)$ 的乘積，可輸入如下：

Example 2: 07-多項式的處理與分析/conv01.m

```
p1 = [1, 0, 1, 1];
p2 = [0, 1, -1, 2];
p3 = conv(p1, p2)
```

```
p3 =
     0     1    -1     3     0     1     2
```

上例中的 p1 與 p2 多項式的乘積結果是 p3，若改以多項式的表示法，即為 $p_3(x) = x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 2$。

若欲求 $p_1(x)$ 除以 $p_2(x)$ 所得的商式與餘式，可輸入：

Example 3: 07-多項式的處理與分析/deconv01.m

```
p1 = [1, 0, 1, 1];
p2 = [1, -1, 2];
[q, r] = deconv(p1, p2)
```

```
q =
     1     1
r =
     0     0     0    -1
```

此即代表 $p_1(x)$ 除以 $p_2(x)$ 後，得到的商式為 $q(x) = x + 1$，餘式為 $r(x) = -1$。

以下列出如何使用 MATLAB 來進行多項式的加減乘除：

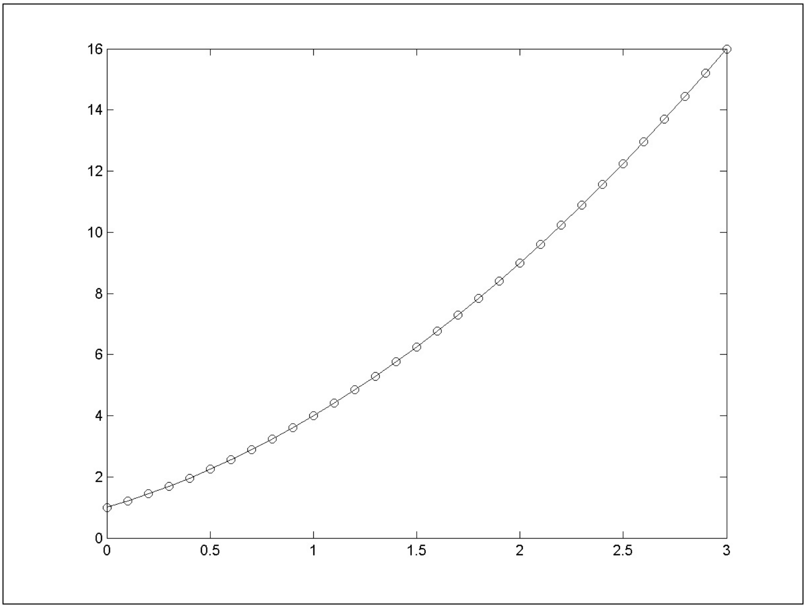
函數	說明
p1 + p2	多項式 $p_1(x)$ 與 $p_2(x)$ 的和
p1 - p2	多項式 $p_1(x)$ 與 $p_2(x)$ 的差
conv(p1, p2)	多項式 $p_1(x)$ 與 $p_2(x)$ 的乘積
[q, r] = deconv(p1, p2)	多項式 $p_1(x)$ 除以 $p_2(x)$ 後，得到商式為 $q(x)$，餘式為 $r(x)$

7-2 多項式的求值、求根、微分與積分

要計算多項式的值，可用 polyval 指令，例如：

Example 1: 07-多項式的處理與分析/polyval01.m

```
p = [1 2 1];
x = 0:0.1:3;
y = polyval(p, x);
plot(x, y, '-o');
```



在上述範例中，x 和 y 都是長度為 31 的向量，y(i) 的值即為 $p(x) = x^2 + 2x + 1$ 在 x = x(i) 的函數值。

若要計算 p(A)，A 為一方陣，可用 polyvalm 指令如下：

Example 2: 07-多項式的處理與分析/polyvalm01.m

```
p = [1 2 1];
A = [1 2; 3 4];
B = polyvalm(p, A)
```

```
B =
    10    14
    21    31
```

此結果和 B = A^2 + 2*A + 1 是一樣的。

若上式改為 B = polyval(p, A)，則其結果和 B = A.^2 + 2*A + 1 是一樣的。（請注意：A^2 和 A.^ 2 的意義完全不同，前者是矩陣 A*A，後者是對矩陣 A 的每一個元素平方。）

欲求多項式的根，可用 MATLAB 的 roots 指令，例如，若要計算多項式 $p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 5x - 1$ 的根，可見下列範例：

Example 3: 07-多項式的處理與分析/roots01.m

```
p = [1, 3, 1, 5, -1];     % 多項式
r = roots(p)              % 求多項式的根
```

```
r =
  -3.2051
   0.0082 + 1.2862i
   0.0082 - 1.2862i
   0.1886
```

欲驗證此四根為多項式 $p(x)$ 的解，可輸入如下：

Example 4: 07-多項式的處理與分析/roots02.m

```
p = [1, 3, 1, 5, -1];     % 多項式
r = roots(p);             % 求多項式的根
polyval(p, r)             % 將根帶入多項式求值
```

```
ans =
  1.0e-014 *
   0.3109
   0.3553 - 0.3887i
   0.3553 + 0.3887i
        0
```

上述結果顯示將四個根帶入多項式求值的結果，都非常接近於零。

Hint

- fzero 指令可用於一般函數的求根，但它一次只能找到一個根，所用的方法是牛頓法。roots 指令只能用於多項式的求根，它能一次找到全部的根，所用的方法是先將多項式表示成「伴隨矩陣」（Companion Matrix），再用解特徵值的方法來求根。

MATLAB 的 polyder 指令可用於多項式的微分，例如：

Example 5: 07-多項式的處理與分析/polyder01.m

```
p = [1 3 3 1];
q = polyder(p)
```

```
q =
     3     6     3
```

此即表示 $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 微分後的結果為 $q(x) = 3x^2 + 6x + 3$。

MATLAB 6.x 以後的版本已經提供 polyint 指令，以便對多項式進行積分，例如：

Example 6: 07-多項式的處理與分析/polyint02.m

```
p = [4 3 2 1];
k = 8;              % 積分後的不定常數
q = polyint(p, k)   % 積分後的多項式
```

```
q =
     1     1     1     1     8
```

此即表示 $p(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ 積分後的結果為 $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 8$。（請注意，在此我們假設積分後的不定常數為 k。）

MATLAB 5.x 並無對多項式積分的指令，但我們可以很快的用其他方法達成積分的目的，例如：

Example 7: 07-多項式的處理與分析/polyint01.m

```
p = [4 3 2 1];
t = length(p):-1:1;
k = 8;                  % 積分後的不定常數
q = [p./t, k]           % 積分後的多項式
```

```
q =
     1     1     1     1     8
```

以下列出如何使用 MATLAB 來進行多項式的求值、求根、微分、積分：

函數	說明
q = polyval(p, x)	計算 p(x) 的值
q = polyvalm(a, A)	計算 p(A)，A 為一方陣
r = roots(p)	計算 p(x) 的根
q = polyder(p)	q(x) 為 p(x) 的微分
q = polyint(p, k)	q(x) 為 p(x) 的積分，其中 k 為任意常數
q = [p./length(p):-1:1, k]	同上一列（polyint 指令不存在時的替代方案）

7-3 矩陣的特徵多項式

給定一方陣 A，其特徵多項式為 $|A-xI|$。我們可用 MATLAB 指令 poly 來計算特徵多項式，例如：

Example 1: 07-多項式的處理與分析/poly01.m

```
A = [1 3 4; 2 4 1; 1 6 2];
p = poly(A)
```

```
p =
    1.0000   -7.0000   -2.0000  -25.0000
```

其中 $p(x) = x^3 - 7x^2 - 2x - 25$ 即為矩陣 A 的特徵多項式。

特徵多項式的根即為矩陣 A 的特徵值，可驗算如下：

Example 2: 07-多項式的處理與分析/poly02.m

```
A = [1 3 4; 2 4 1; 1 6 2];
p = poly(A);         % 方陣的特徵多項式
r = roots(p);        % 特徵方程式的根，亦即固有值
det(A-r(1)*eye(3))
det(A-r(2)*eye(3))
det(A-r(3)*eye(3))
```

```
ans =
 -5.1682e-013
ans =
 -4.0233e-014 +1.3232e-014i
ans =
 -4.0233e-014 -1.3232e-014i
```

由上述範例可得知，特徵方程式的根會讓 $A-rI$ 的行列式值為零，r 同時也是方陣 A 的特徵值或固有值（Eigenvalues）。

Hint

⊙ 可用 eig 指令來直接計算方陣 A 的特徵值及特徵向量。

7-4 部份分式展開

指令 residue 可用於計算一分式的部份分式展開。若 $A(s)$ 和 $B(s)$ 為多項式，且 $B(s)$ 無重根，則分式 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 可以表示為

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_1}{s-p_2} + \cdots + \frac{r_n}{s-p_n} + C(s)$$

其中 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 為 $A(s)$ 的根（或是 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 的極點），$r_1,r_2,\ldots,r_n$ 為常數，$C(s)$ 為一多項式。例如：欲求 $\frac{3s+8}{s^2+5s+6}$ 的部份分式展開，可輸入如下：

Example 1: 07-多項式的處理與分析/residue01.m

```
b = [3 8];
a = [1 5 6];
[r, p, k] = residue(b, a)
```

```
r =
    1.0000
    2.0000
p =
   -3.0000
   -2.0000
k =
     []
```

由以上結果得知：

$$\frac{3s+8}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s+2}$$

部份分式展開特別適用於線性系統之轉換函數（Transfer Function）的分析。以上例而言，若 $\frac{3s+8}{s^2+5s+6}$ 為一系統之轉換函數，經由上述部份分式展開後，可知其脈衝響應（Impulse Response）為 $e^{-3t} + 2e^{-2t}$。

習題

1. 試用 roots 指令算出 $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 的根。

2. 若向量 v 等於 $[x^2, x, 1]^T$，則上題的方程式可以寫成下列矩陣方程式：

$$Av = xv$$

換句話說，此時 x 就變成 A 的固有值，而 v 則是 A 的固有向量。請問

a. A 是多少？（這個矩陣就是多項式 $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 的「伴隨矩陣」。）

b. A 的固有值和第一題的答案是否相同？請寫一段 MATLAB 程式來驗證。

3. 請寫一個程式，使用 residue 指令來計算下列運算式的部份分式展開：

$$\frac{3s^2+5s+2}{(s+1)^3(s^2+1)}$$

同時再利用 residue 指令，驗算所得答案是否正確。

Hint

⊙ 請查看 residue 的線上說明。

4. 若 y = rand(10,1)，請用一個 9 次的多項式，來通過 (i, y(i)), i=1~10。請畫出此多項式及十點資料點。